

KUPERUS — die Existenz von zwei schon früher durch TANGEN¹² beobachteten Resonanzen bestätigt werden; drei weitere wurden erstmalig gefunden. Die Resonanzen konnten durch Verwendung von Auffängern aus AgCl, in denen die Chlorisotope zu 95,2% (³⁵Cl) bzw. 60,5% (³⁷Cl) angereichert waren⁵, eindeutig dem jeweiligen Isotop zugeordnet werden (s. Abb. 1).

Die in Tab. 1 aufgeführten experimentellen Halbwertsbreiten, die, wie in II dargelegt, aus dem An-

stieg der Ausbeutekurve an der Resonanz gewonnen wurden, stellen lediglich obere Grenzen für die natürlichen Gesamt-Resonanzhalbwertsbreiten dar. Diese lassen sich mit Hilfe einer ebenfalls in II näher erläuterten theoretischen Betrachtung für die angegebenen Resonanzen zu kleiner als 1 eV abschätzen.

Herrn Prof. Dr. H. FRÄNZ danken wir für förderndes Interesse, Herrn Ing. H.-J. BARRENSCHEEN für wertvolle Mitarbeit bei den Messungen.

Zur Elektronenoptik elektrostatischer Beschleuniger im relativistischen Bereich

Von JOACHIM KESSLER

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe
(Z. Naturforsch. **16 a**, 1138—1146 [1961]; eingegangen am 22. Juli 1961)

The properties of electrostatic lenses for relativistic particles are described by means of transfer matrices. Using GANS' polygon-method, the matrices are calculated by integrating the equation of motion of relativistic particles in electric fields that have rotational symmetry. These general results are used for calculating the first-order approximations of the characteristic data for two-cylinder lenses. Numerical evaluation shows that the lens properties at a fixed V_2/V_1 vary only slowly with increasing energy (V_1 and V_2 being the potentials of the lens). The results are compared with those calculated by TIMM for the nonrelativistic case, which can be seen in our results as a special case. The easiest way of applying the derived formulas to the case of multistage accelerator tubes is discussed.

Für die Berechnung elektrostatischer Beschleuniger war die Arbeit von TIMM¹ ein wesentlicher Fortschritt. Die Abbildungseigenschaften rotationssymmetrischer und ebener Felder wurden dort durch Angabe der „Abbildungsmatrizen“ vollständig beschrieben. Ein großer Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die Berechnung mehrerer hintereinander geschalteter Linsen, wie sie in Beschleunigungsrohren benutzt werden, sehr einfach wird. Man braucht hier nur die entsprechenden Abbildungsmatrizen miteinander zu multiplizieren, um die Abbildungsmatrix des Gesamtsystems zu erhalten.

Der Timmschen Arbeit lag das Problem zugrunde, die Abbildungseigenschaften eines *Ionen*-beschleunigungsrohres zu ermitteln, das in Verbindung mit einem VAN DE GRAAFF-Generator betrieben wurde. Deshalb interessierten Einflüsse der relativistischen Massenveränderlichkeit dort nicht. Beim Betrieb

eines gleichartigen Beschleunigers für Elektronen befindet man sich dagegen praktisch immer im relativistischen Bereich, so daß sich die Timmschen Ergebnisse nicht ohne weiteres übernehmen lassen.

Deshalb sollen hier auf der Grundlage der Matrendarstellung die Abbildungseigenschaften elektrostatischer Rohrlinsen für relativistische Teilchen berechnet werden. Das Ziel ist es, auch im relativistischen Bereich *geschlossene* Formeln anzugeben, aus denen sich die Linsendaten bei *beliebigen* Potentialverhältnissen an der Linse und *beliebigen* Teilchenenergien ablesen lassen.

Bisher wurden im relativistischen Gebiet nur in Spezialfällen Linsendaten angegeben, z. B. von HANSEN und WEBSTER^{2a} für den Fall sehr schwacher Linsen oder von BAS^{2b} u. a., die einen speziellen Beschleuniger mit einer elektronischen Rechenmaschine sehr genau berechneten.

¹ U. TIMM, Z. Naturforsch. **10 a**, 593 [1955].

^{2a} W. W. HANSEN u. D. L. WEBSTER, Rev. Sci. Instrum. **7**, 17 [1936].

^{2b} E. B. BAS, L. PREUSS u. W. SCHNEIDER, Z. angew. Math. Phys. **10**, 533 [1959].



1. Zusammenhang der charakteristischen Linsendaten mit der Abbildungsmatrix

Wir stellen in diesem Abschnitt die von TIMM¹ gewonnenen Ergebnisse über den allgemeinen Zusammenhang der charakteristischen Linsendaten mit den Elementen der Abbildungsmatrix zusammen und halten uns dabei an die von ihm eingeführten Bezeichnungen.

Die Abbildungseigenschaften einer Linse werden vollständig beschrieben durch Angabe der bild- und dingseitigen Brennweiten f und Brennpunktslagen F . Die bekannte Definition dieser Größen wird in den ersten beiden Abbildungen veranschaulicht. Die Größen F oder f werden häufig ersetzt durch die Abstände ΔF der Hauptebenen H von den zugehörigen Linsenrändern. Es gilt

$$f = F - \Delta F \quad (1)$$

(man beachte Vorzeichen und Nullpunkte der Zählung).

Die Abb. 1 und 2 stellen übrigens die Daten einer beschleunigenden Rohrlinse, wie sie die Timmschen Formeln für den Fall $V_2/V_1=4$ liefern, maßstäblich dar (eV_1 bzw. eV_2 sind Eintritts- bzw. Austrittsenergie der beschleunigten Teilchen, e = Elementarladung).

Wir wollen jetzt die Abbildungsmatrix einführen. Ein Elektronenstrahl trete im Abstand r_e von der Achse mit der Neigung $r'_e = (dr/dz)_e$ in das Linsenfeld ein und komme im Abstand r_a mit der Neigung r'_a wieder heraus (Abb. 3). Man überlegt sich leicht, daß sich die Daten r_a und r'_a des austretenden Strahls aus denen des einfallenden Strahls in der Form

$$\begin{aligned} r_a &= a_{11} r_e + a_{12} r'_e, \\ r'_a &= a_{21} r_e + a_{22} r'_e \end{aligned} \quad (2)$$

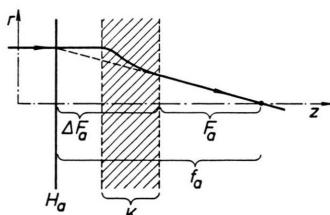


Abb. 1. Zur Definition der bildseitigen Linsendaten. Alle Größen werden in der Einfallsrichtung positiv gezählt. Die Zählung von F_a und ΔF_a beginnt am bildseitigen Linsenrand, die von f_a an der Hauptebene H_a . K ist die effektive Länge der Linse.

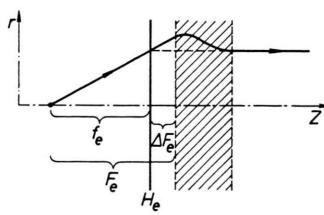


Abb. 2. Zur Definition der dingseitigen Linsendaten. Alle Größen werden in der Einfallsrichtung negativ gezählt. Die Zählung von F_e und ΔF_e beginnt am dingseitigen Linsenrand, die von f_e an der Hauptebene H_e .

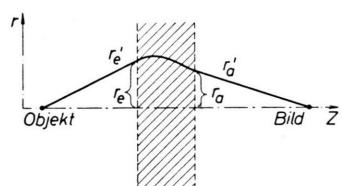


Abb. 3. Zur Definition der Daten des Strahls.

linear kombinieren lassen, sofern die Bahn innerhalb der Linse durch eine lineare, homogene, gewöhnliche Diff.-Gl. 2. Ordnung beschrieben wird. Oder in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{r}_a = \mathfrak{A} \mathbf{r}_e \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}. \quad (3)$$

\mathfrak{A} ist die Abbildungsmatrix.

Mit Hilfe einfacher geometrischer Betrachtungen überlegt man sich an Hand der Abb. 1 und 2 leicht (vgl. TIMM¹), daß zwischen den Linsendaten und den Elementen der Abbildungsmatrix folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{aligned} F_a &= -\frac{a_{11}}{a_{21}}, & \Delta F_a &= \frac{1-a_{11}}{a_{21}}, & f_a &= -\frac{1}{a_{21}}, \\ F_e &= -\frac{a_{22}}{a_{21}}, & \Delta F_e &= \frac{D-a_{22}}{a_{21}}, & f_e &= -\frac{D}{a_{21}}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei $D = \text{Det. } \mathfrak{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Drückt man umgekehrt die Matrixelemente durch die Linsendaten aus, so folgt

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{f_a} \begin{pmatrix} F_a & f_a f_e - F_a F_e \\ -1 & F_e \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Man erkennt hieraus, daß das Problem der Bestimmung der Linsendaten auf die Bestimmung der Abbildungsmatrix zurückgeführt ist. Daraus lassen sich dann alle interessierenden Abbildungseigenschaften bestimmen, wie etwa Abbildungsgleichung, Lateral- und Angularvergrößerung.

2. Allgemeine Berechnung der Abbildungsmatrix nach der Polygonmethode

Wir wollen jetzt die Abbildungsmatrix für die Bewegung relativistischer Teilchen in elektrostati-

schen Rohrlinsen berechnen. Wenn wir uns auf den Bereich der GAUSSSchen Dioptrik (flache, achsennahe Strahlen) beschränken, lautet die Bewegungsgleichung für relativistische Teilchen in rotationssymmetrischen elektrostatischen Feldern³

$$\sqrt{1+\varepsilon \Phi} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{1+\varepsilon \Phi} \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} (1+2\varepsilon\Phi) \Phi'' r = 0, \quad (6)$$

oder umgeformt

$$r'' = - \frac{1+2\varepsilon\Phi}{2(1+\varepsilon\Phi)\Phi} [\Phi' r' + \frac{1}{2} \Phi'' r]. \quad (7)$$

Dabei ist Φ das Potential längs der Achse, dessen additive Konstante so gewählt ist, daß Φ dort verschwindet, wo die Teilchengeschwindigkeit Null ist.

$$\varepsilon = e/2 m_0 c^2$$

bestimmt die relativistische Korrektur. m_0 und e sind Ruhmasse und Betrag der Ladung des beschleunigten Teilchens (Φ wird also für positive und negative Teilchen positiv gerechnet).

Für Elektronen wird

$$\varepsilon = 0,978 \cdot 10^{-6} [\text{V}^{-1}],$$

für Protonen

$$\varepsilon = 0,539 \cdot 10^{-9} [\text{V}^{-1}].$$

Bei vorgegebener Linse, wenn also Φ und damit auch seine Ableitungen längs der Achse bekannt sind, läßt sich die Bahnkurve $r(z)$ aus (7) berechnen. Diese Gl. läßt sich aber selbst im nichtrelativistischen Fall ($\varepsilon=0$) für beliebiges Achsenpotential Φ nicht allgemein integrieren. GANS⁴ approximierte deshalb das Achsenpotential durch einen Polygonzug (vgl. Abb. 4) und führte die Integration der nichtrelativistischen Gleichung schrittweise durch. Seine Ergebnisse bilden die Grundlage der TIMMSchen Matrizendarstellung.

Wir wollen jetzt nach der GANSSchen Polygonmethode, bei der man durch genügend feine Unterteilung der Strecke K jede gewünschte Genauigkeit erreichen kann, die *relativistische* Gl. (7) integrieren. Dabei kommen nur 2 verschiedenartige Schritte vor: Integration über einen Abschnitt und Integration über eine Ecke. Wir führen diese Schritte nacheinander durch.

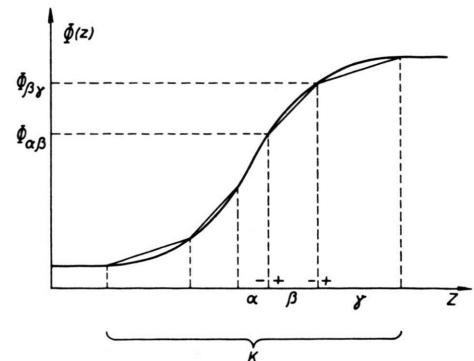


Abb. 4. Approximation des Achsenpotentials durch Polygonzug.

a) Integration über einen Abschnitt β :

Wegen $\Phi''=0$ wird aus (7)

$$r'' = - \frac{1+2\varepsilon\Phi}{2(1+\varepsilon\Phi)\Phi} \Phi' r' \quad (7 \text{ a})$$

oder

$$\frac{d}{dz} \ln r' = - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln (1+\varepsilon\Phi) \Phi. \quad (8)$$

Daraus folgt

$$r'(z) = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon\Phi_{\alpha\beta})\Phi_{\alpha\beta}}{[1+\varepsilon\Phi(z)]\Phi(z)}} \cdot r'_{\alpha\beta} + \quad (9)$$

für $z_{\alpha\beta+} \leq z \leq z_{\beta\gamma-}$.

Dabei kennzeichnet der Index $\alpha\beta^+$ bzw. $\alpha\beta^-$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert an der Ecke $\alpha\beta$.

Integration von (9) zwischen den Grenzen $z_{\alpha\beta+}$ und $z_{\beta\gamma-}$ liefert

$$r_{\beta\gamma-} = r_{\alpha\beta+} + \frac{\sqrt{(1+\varepsilon\Phi_{\alpha\beta})\Phi_{\alpha\beta}}}{\Phi'_\beta \sqrt{\varepsilon}} r'_{\alpha\beta+} + \frac{\cdot \ln \frac{1+2\varepsilon\Phi_{\beta\gamma}+2\sqrt{\varepsilon}\Phi_{\beta\gamma}(\varepsilon\Phi_{\beta\gamma}+1)}{1+2\varepsilon\Phi_{\alpha\beta}+2\sqrt{\varepsilon}\Phi_{\alpha\beta}(\varepsilon\Phi_{\alpha\beta}+1)}}. \quad (10 \text{ a})$$

Wenn man noch berücksichtigt, daß aus (9) folgt

$$r'_{\beta\gamma-} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon\Phi_{\alpha\beta})\Phi_{\alpha\beta}}{(1+\varepsilon\Phi_{\beta\gamma})\Phi_{\beta\gamma}}} \cdot r'_{\alpha\beta+}, \quad (10 \text{ b})$$

kann man (10 a) und (10 b) in Matrizenform schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{(1+\varepsilon\Phi_{\alpha\beta})\Phi_{\alpha\beta}} \ln \frac{1+2\varepsilon\Phi_{\beta\gamma}+2\sqrt{\varepsilon}\Phi_{\beta\gamma}(\varepsilon\Phi_{\beta\gamma}+1)}{1+2\varepsilon\Phi_{\alpha\beta}+2\sqrt{\varepsilon}\Phi_{\alpha\beta}(\varepsilon\Phi_{\alpha\beta}+1)}}{\Phi'_\beta \sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(1+\varepsilon\Phi_{\alpha\beta})\Phi_{\alpha\beta}}{(1+\varepsilon\Phi_{\beta\gamma})\Phi_{\beta\gamma}}} \end{pmatrix} r_{\alpha\beta+}. \quad (10)$$

³ W. GLASER, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer-Verlag, Wien 1952, S. 144.

⁴ R. GANS, Z. techn. Phys. **18**, 41 [1937].

Damit haben wir für den Abschnitt β Austrittsort und Austrittstangente durch die entsprechenden Eintrittsdaten in der gewünschten Form (3) dargestellt.

In Beschleunigern kommt häufig der Fall vor, daß $\Phi'_\beta = 0$ wird, weil zwischen den Beschleunigungsstrecken im allgemeinen feldfreie Gebiete liegen. Die Beziehung (10) gilt auch in diesem Grenzfall noch. Sie nimmt dann die einfache Form

$$\mathbf{r}_{\beta\gamma^-} = \begin{pmatrix} 1 & K_\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\alpha\beta} \quad (11)$$

an, was man sich leicht überlegt, wenn man beachtet, daß in diesem Fall $\Phi_{\beta\gamma}$ gegen $\Phi_{\alpha\beta}$ geht und daß $\ln(1+x) \rightarrow x$ für kleine x gilt. K_β ist dabei die Länge des feldfreien Abschnitts. Die Gültigkeit der Gl. (11) im feldfreien Raum kann man sich auch direkt überlegen.

b) Integration über eine Ecke $\beta\gamma$:

Hier gilt $\Phi'' \rightarrow \infty$ und Φ, Φ', r, r' endlich. Deshalb folgt aus (7)

$$r'' \rightarrow -\frac{1+2\varepsilon\Phi}{4(1+\varepsilon\Phi)\Phi} \Phi'' r. \quad (7b)$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{4} \frac{(1+2\varepsilon\Phi)\Phi'' r}{(1+\varepsilon\Phi)\Phi} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{4} \frac{(1+2\varepsilon\Phi)\Phi' r}{(1+\varepsilon\Phi)\Phi} \right), \quad (12)$$

da nach der Differentiation alle Glieder auf der rechten Seite vernachlässigbar sind, die nicht den Faktor Φ'' enthalten. Integration über die Ecke liefert also

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\beta\gamma^+} &= \mathbf{r}'_{\beta\gamma^-} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(1+2\varepsilon\Phi_{\beta\gamma})}{(1+\varepsilon\Phi_{\beta\gamma})\Phi_{\beta\gamma}} (\Phi'_{\beta\gamma^-} - \Phi'_{\beta\gamma^+}) \mathbf{r}_{\beta\gamma^-}. \end{aligned} \quad (13a)$$

Berücksichtigt man, daß

$$\mathbf{r}_{\beta\gamma^+} = \mathbf{r}_{\beta\gamma^-}, \quad (13b)$$

so lassen sich die Werte von r und r' hinter der Ecke durch die Werte vor der Ecke in Matrizenform ausdrücken:

$$\mathbf{r}_{\beta\gamma^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(1+2\varepsilon\Phi_{\beta\gamma})(\Phi'_{\beta\gamma^-} - \Phi'_{\beta\gamma^+})}{4(1+\varepsilon\Phi_{\beta\gamma})\Phi_{\beta\gamma}} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\beta\gamma^-}. \quad (13)$$

Um die Bewegungsgleichung (7) über die ganze Länge K der Linse zu integrieren, braucht man nur die beiden eben gemachten Schritte mehrmals nacheinander durchzuführen. Der große Vorteil der Matrizendarstellung ist, daß man dazu nur die jeweiligen Matrizen miteinander zu multiplizieren braucht; z. B. ergibt sich in dem einfachsten Fall, in dem

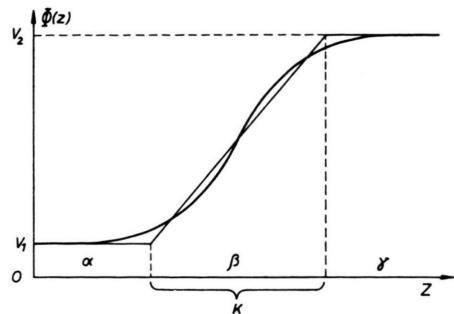


Abb. 5. Einfachste Approximation der Rohrlinse.

man das Achsenpotential durch eine Gerade approximiert (vgl. Abb. 5) :

$$\mathbf{r}_{\beta\gamma^+} = \mathfrak{A}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{r}_{\beta\gamma^-} = \mathfrak{A}_{\beta\gamma} \cdot \mathfrak{A}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta^+} = \mathfrak{A}_{\beta\gamma} \cdot \mathfrak{A}_\beta \cdot \mathfrak{A}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta^-}, \quad (14)$$

wobei die doppelt-indizierten Matrizen zu den Ecken gehören, also wie in (13) darstellbar sind, während die einfach indizierten Matrizen zu den Abschnitten gehören und damit eine Form wie in (10) haben.

3. Die einfachste Approximation der Rohrlinse

Wir wollen jetzt die allgemeinen Überlegungen des letzten Abschnitts auf den Fall anwenden, daß wir das Achsenpotential einer Rohrlinse in einfachster Weise, wie in Abb. 5, approximieren.

Wenn wir mit V_1 und V_2 die Potentiale der Rohrstücke bezeichnen (additive Konstante so gewählt, daß $V=0$, wenn Teilchengeschwindigkeit Null ist), dann wird

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} &= V_1, \quad \Phi_{\beta\gamma} = V_2, \quad \Phi'_{\alpha\beta^-} = \Phi'_{\beta\gamma^+} = 0, \\ \Phi'_{\alpha\beta^+} &= \Phi'_{\beta^-} = \Phi'_{\beta\gamma^-} = (V_2 - V_1)/K. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen und $N = V_2/V_1$ erhalten wir bei der Integration über die rechte Ecke nach (13)

$$\mathbf{r}_{\beta\gamma^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1+2\varepsilon V_2}{1+\varepsilon V_2} \frac{N-1}{4KN} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\beta\gamma^-}, \quad (15)$$

bei Integration über den mittleren Abschnitt nach (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\beta\gamma^-} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{K}{N-1} \sqrt{\frac{\varepsilon V_2 + N}{\varepsilon V_2}} \ln N \frac{1+2\varepsilon V_2 + 2\sqrt{\varepsilon V_2(\varepsilon V_2 + N)}}{N+2\varepsilon V_2 + 2\sqrt{\varepsilon V_2(\varepsilon V_2 + N)}} \\ 0 & \frac{1}{N} \sqrt{\frac{N+\varepsilon V_2}{1+\varepsilon V_2}} \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\alpha\beta^+}, \end{aligned} \quad (16)$$

bei Integration über die linke Ecke nach (13)

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(N+2\varepsilon V_2)(N-1)}{4K(N+\varepsilon V_2)} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\alpha\beta^-}. \quad (17)$$

Beachten wir, daß mit den Bezeichnungen des 1. Abschnittes $r_{\beta\gamma+} = r_a$ und $r_{\alpha\beta-} = r_e$ ist, so folgt aus (15), (16) und (17), wenn wir die drei dort auftretenden Matrizen miteinander multiplizieren.

$$r_a = \begin{pmatrix} 1 - \frac{N+2E_2}{4\sqrt{E_2(N+E_2)}} \cdot L & \frac{K}{N-1} \sqrt{\frac{E_2+N}{E_2}} \cdot L \\ \frac{N-1}{4KN\sqrt{1+E_2}} \left[\frac{1+2E_2}{\sqrt{1+E_2}} - \frac{N+2E_2}{\sqrt{N+E_2}} - \frac{(1+2E_2)(N+2E_2)}{4\sqrt{E_2(N+E_2)(1+E_2)}} \cdot L \right] & \frac{1}{N} \sqrt{\frac{N+E_2}{1+E_2}} \left[\frac{(1+2E_2) \cdot L}{4\sqrt{E_2(1+E_2)}} + 1 \right] \end{pmatrix} r_e, \quad (18)$$

mit $E_2 = \varepsilon V_2$

$$\text{und } L = \ln N \frac{1+2E_2+2\sqrt{E_2(1+E_2)}}{N+2E_2+2\sqrt{E_2(N+E_2)}}. \quad (19)$$

Damit haben wir Austrittsort und -tangente des Strahls mit Eintrittsort und -tangente in der Form (3) miteinander verknüpft und die Abbildungsmatrix \mathfrak{A} gewonnen.

Ermittelt man daraus die Daten der Linse gemäß den Gln. (4), so folgt mit der Abkürzung

$$\nu = (N-1) [4\sqrt{E_2(N+E_2)}(1+2E_2) - 4\sqrt{E_2(1+E_2)}(N+2E_2) - (1+2E_2)(N+2E_2)L]:$$

$$F_a/K = -4N(1+E_2)[4\sqrt{E_2(N+E_2)} - (N+2E_2)L]/\nu,$$

$$\Delta F_a/K = 4N(1+E_2)(N+2E_2)L/\nu,$$

$$f_a/K = -16N(1+E_2)\sqrt{E_2(N+E_2)}/\nu, \quad (20)$$

$$F_c/K = -4(N+E_2)[4\sqrt{E_2(1+E_2)} + (1+2E_2)L]/\nu,$$

$$\Delta F_c/K = -4(N+E_2)(1+2E_2)L/\nu,$$

$$f_c/K = -16(N+E_2)\sqrt{E_2(1+E_2)}/\nu.$$

Diese Ausdrücke sind zwangsläufig etwas komplizierter als die entsprechenden nichtrelativistischen Formeln, da die Abbildungseigenschaften einer elektrostatischen Linse im relativistischen Fall nicht nur vom Potentialverhältnis N , sondern auch vom absoluten Wert des Potentials abhängen. Aus (20) läßt sich ablesen, daß zwischen den zusammengehörigen bild- und dingseitigen Linsendaten einfache Beziehungen bestehen, deren bekannteste die allgemeine Gleichung

$$f_e = (1/N) \sqrt{(N+E_2)/(1+E_2)} f_a \quad \text{ist.}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Timmischen Ergebnisse in den hier angegebenen Resultaten als Spezialfälle enthalten sind: Im Grenzfall $E_2 \rightarrow 0$ (bzw. $\varepsilon \rightarrow 0$ im Abschnitt 2) gehen sämtliche Abbildungsmatrizen und Linsendaten in die entsprechenden nichtrelativistischen Ausdrücke über.

Durch die Gln. (20) sind die Abbildungseigenschaften der Linse vollständig beschrieben;

$$\text{Abbildungsgleichung} \quad A' E' = f_a \cdot f_e, \quad (21)$$

$$\text{Lateralvergrößerung} \quad \beta = -A'/f_a \quad (22)$$

und Angularvergrößerung (vgl. GLASER⁵)

$$\gamma = \frac{1}{\beta N} \sqrt{\frac{N+E_2}{1+E_2}} \quad (23)$$

lassen sich mit ihrer Hilfe sofort hinschreiben. E' bzw. A' ist hierin der Abstand des Gegenstands bzw. Bildes vom dingseitigen bzw. bildseitigen Brennpunkt („Brennpunktsweite“).

Die Umkehrbarkeit des Strahlengangs sieht man den Gln. (20) sofort an. Ersetzt man nämlich in (20) $N = V_2/V_1 = E_2/E_1$ durch $1/N$ und E_2 durch $E_1 = E_2/N$ (das bedeutet: Man betrachtet ein Teilchen, das in umgekehrter Richtung durch die Linse läuft), so gehen die bildseitigen in die dingseitigen Linsendaten über und umgekehrt.

Um einen Überblick über die Linseneigenschaften im relativistischen Bereich zu erhalten, wurden die Gln. (20) für 3 verschiedene Energien numerisch ausgewertet, und zwar für $E_2 = 0,1, 1$ und 10 , was wegen $E_2 = eV_2/2m_0c^2$ Elektronenendenergien von $102,2$ keV, $1,022$ MeV und $10,22$ MeV entspricht. In Tab. 1 sind die Ergebnisse für verschiedene Werte des Potentialverhältnisses N an der Linse zusammengestellt. Wegen der Umkehrbarkeit des Strahlenganges enthält die Tabelle mehr Information als es auf den ersten Blick scheint. Zum Beispiel stellen die Werte für $E_2 = 0,1$ und $N = 0,5$ nicht nur die Daten einer Linse dar, die Elektronen von $204,4$ keV auf $102,2$ keV abbremst, sondern sie beschreiben – bei Vertauschung der bildseitigen und dingseitigen Linsendaten – auch eine Linse, die Elektronen von $102,2$ keV auf $204,4$ keV beschleunigt, obwohl der letztere Wert nicht ausdrücklich als Endenergie E_2 aufgeführt ist.

Mit Hilfe der numerischen Ergebnisse und der Gln. (21) bis (23) lassen sich die Abbildungseigen-

⁵ W. GLASER, Handbuch d. Physik XXXIII, Springer-Verlag, Berlin 1956, S. 185.

N	0,1	0,5	0,8	2	4	6	8	10	20	
F_a	$E_2 = 0,1$	0,6419	11,19	112,8	10,64	1,841	0,6329	0,1565	- 0,1012	- 0,5923
K	$E_2 = 1$	0,5641	11,00	114,9	11,45	2,054	0,7435	0,2264	- 0,05378	- 0,5752
	$E_2 = 10$	0,4384	8,332	86,42	8,607	1,550	0,5430	0,1318	- 0,09903	- 0,5650
ΔF_a	$E_2 = 0,1$	0,2419	1,665	6,282	- 2,906	- 1,871	- 1,661	- 1,570	- 1,518	- 1,422
K	$E_2 = 1$	0,2804	2,340	8,956	- 3,967	- 2,381	- 2,023	- 1,857	- 1,759	- 1,561
	$E_2 = 10$	0,2326	2,090	8,350	- 4,152	- 2,738	- 2,435	- 2,292	- 2,203	- 1,987
f_a	$E_2 = 0,1$	0,4000	9,525	106,5	13,54	3,712	2,294	1,726	1,416	0,8300
K	$E_2 = 1$	0,2837	8,657	105,9	15,41	4,435	2,767	2,084	1,706	0,9862
	$E_2 = 10$	0,2059	6,242	78,07	12,76	4,288	2,978	2,424	2,104	1,422
F_e	$E_2 = 0,1$	- 0,05378	10,96	112,7	10,87	2,290	1,197	0,7970	0,5931	0,2546
K	$E_2 = 1$	- 0,09903	10,78	114,8	11,67	2,497	1,305	0,8659	0,6419	0,2716
	$E_2 = 10$	- 0,2583	8,110	86,35	8,825	1,971	1,075	0,7392	0,5641	0,2597
ΔF_e	$E_2 = 0,1$	- 1,759	- 3,113	- 7,710	1,513	0,4982	0,2971	0,2114	0,1639	0,07720
K	$E_2 = 1$	- 2,203	- 4,212	- 10,795	2,232	0,7440	0,4426	0,3134	0,2419	0,1118
	$E_2 = 10$	- 2,231	- 4,087	- 10,35	2,162	0,7622	0,4768	0,3516	0,2804	0,1423
f_e	$E_2 = 0,1$	1,706	14,07	120,4	9,357	1,792	0,9003	0,5855	0,4292	0,1774
K	$E_2 = 1$	2,104	15,00	125,6	9,439	1,753	0,8627	0,5525	0,4000	0,1598
	$E_2 = 10$	1,973	12,20	96,69	6,663	1,209	0,5986	0,3876	0,2837	0,1174

Tab. 1. Daten einer Rohrlinse für verschiedene Potentialverhältnisse $N = V_2/V_1$ und Endenergien. Die Werte $E_2 = 0,1, 1$ und 10 entsprechen Energien von $102,2$ keV, $1,022$ MeV und $10,22$ MeV, sofern es sich bei den beschleunigten Teilchen um Elektronen handelt.

schaften elektrostatischer Linsen in konkreten Fällen leicht überblicken.

4. Diskussion der Ergebnisse

Hier interessiert weniger der Verlauf der Linsendaten selbst (der qualitative Verlauf ist derselbe wie im nichtrelativistischen Fall) als die Verhältnisse von relativistischen zu nichtrelativistischen Daten. Sie sind in den Abb. 6 und 7 als Funktion des Spannungsverhältnisses $N = V_2/V_1$ an der Linse dargestellt. Parameter ist hier $E_2 = e V_2/2 m_0 c^2$, die End-

energie in Einheiten der Ruhmasse der beschleunigten Teilchen. Der Knick in den Kurven bei $N = 1$ kommt daher, daß die Abszisse für $N < 1$ um das Zehnfache gestreckt wurde. Die Energieabhängigkeit der bezogenen dingseitigen Linsendaten erkennt man am besten aus der Abb. 8.

Vergleicht man die dargestellten Kurven mit denen von Bas und Mitarbeitern^{2b}, so fällt sofort die gute qualitative Übereinstimmung ins Auge (man beachte, daß das dortige \approx unserem $1/N$ entspricht). Quantitative Unterschiede sind natürlich vorhanden. Das muß so sein, denn unseren numerischen Werten

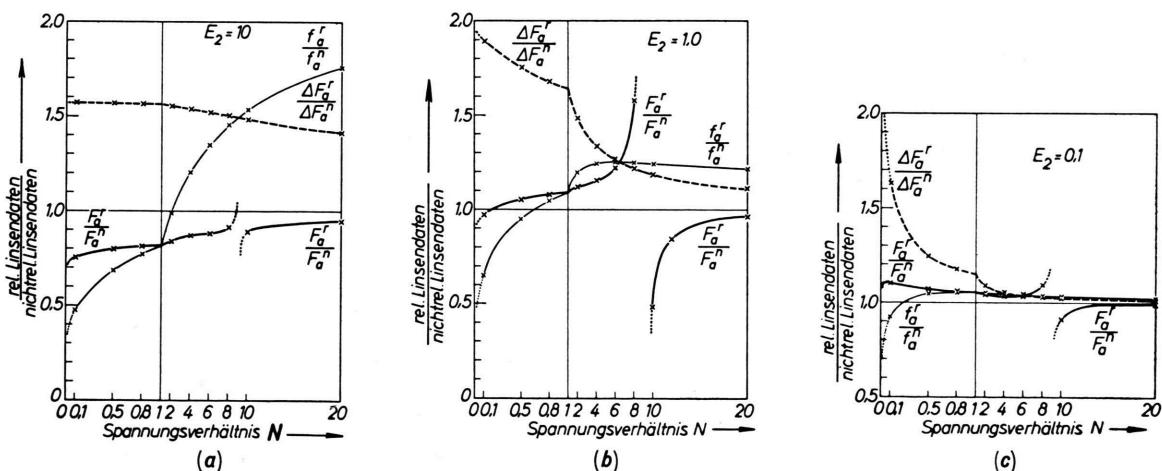


Abb. 6 a - c. Bildseitige relativistische Linsendaten bezogen auf die entsprechenden nichtrelativistischen Daten als Funktion des Spannungsverhältnisses $N = V_2/V_1$ an der Linse. Parameter: Endenergie $E_2 = e V_2/2 m_0 c^2$. Pol von F_a'/F_a^n bei $N = 9$.

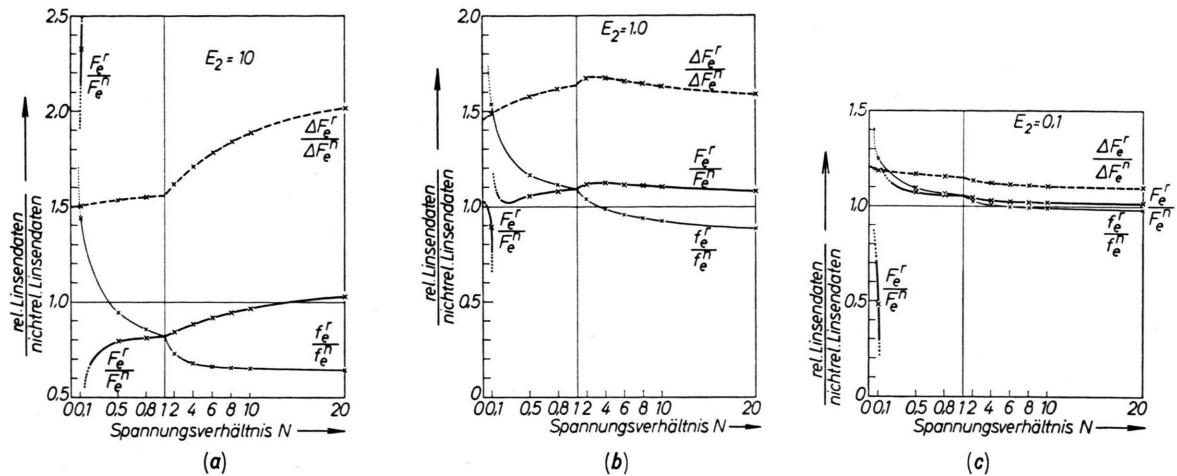


Abb. 7 a – c. Dingseitige relativistische Linsendaten bezogen auf die entsprechenden nichtrelativistischen Daten als Funktion des Spannungsverhältnisses $N = V_2/V_1$ an der Linse. Parameter: Endenergie $E_2 = e V_2/2 m_0 c^2$. Pol von F_e^r/F_e^n bei $N = \frac{1}{2}$.

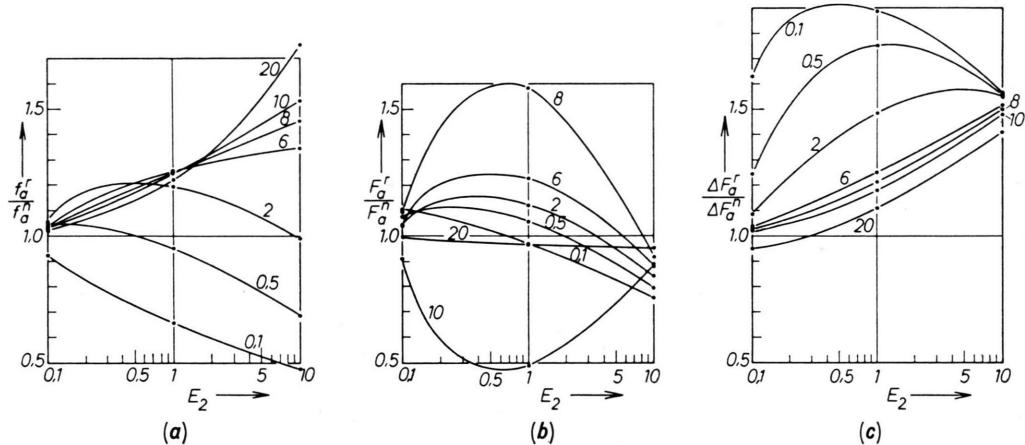


Abb. 8. Bildseitige relativistische Linsendaten bezogen auf die entsprechenden nichtrelativistischen Daten als Funktion der Endenergie $E_2 = e V_2/2 m_0 c^2$. Parameter: Spannungsverhältnis $N = V_2/V_1$.

liegt ja die einfachste Approximation der Rohrlinse durch einen Streckenzug wie in Abb. 5 zugrunde. Den Ergebnissen von Bas und Mitarbeitern liegt dagegen der genaue Potentialverlauf der von ihnen berechneten speziellen Linse zugrunde. Wenn man nicht die grobe Approximation der Abb. 5 wählt, sondern den Polygonzug genügend verfeinert, läßt sich mit den Ergebnissen des Abschnitts 2 jede Linse mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen. Man erhält die Abbildungsmatrix einfach durch Multiplikation von Matrizen der Formen (10) und (13).

Ein Blick auf die Kurven zeigt, daß die relativistischen Erscheinungen den Strahlverlauf im 100 keV-Bereich allmählich zu beeinflussen beginnen (diese Energieangabe bezieht sich auf Elektronen). Ihr

Einfluß nimmt mit wachsender Energie nur sehr langsam zu, so daß selbst bei einer Massenzunahme der beschleunigten Teilchen um das 20-fache ($E_2 = 10$) die relativistischen Linsendaten selten mehr als etwa 50% von den nichtrelativistischen abweichen. Das kommt u. a. daher, daß die Abweichungen von der Bahn des klassischen Teilchens, die durch die relativistischen Einflüsse bewirkt werden, im fokussierenden und defokussierenden Gebiet der Linse gegenläufig sind. Das erkennt man z. B. aus der Abb. 9 a, die ebenso wie die Abb. 9 b und 9 c verdeutlichen soll, wie sich die veränderten Brenndaten auf den Strahlverlauf auswirken.

Abb. 9a bzw. 9b stellt einen Fall dar, wo der Brennpunkt für relativistische Teilchen näher an der

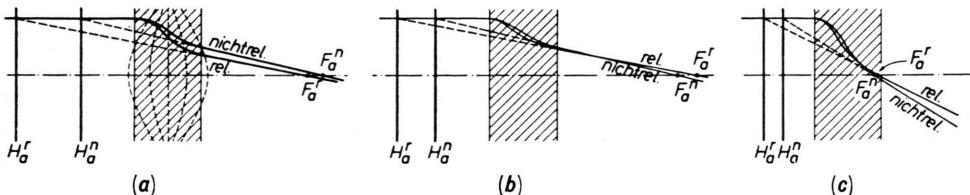


Abb. 9. Vergleich von nichtrelativistischen und relativistischen Strahlengängen; a) $E_2=10, N=4$; b) $E_2=1, N=4$; c) $E_2=1, N=10$. Der Deutlichkeit halber wurden die Zahlenbeispiele ohne Rücksicht auf praktische Bedürfnisse gewählt und die Voraussetzung flacher, achsennaher Strahlen bei der Zeichnung nicht beachtet.

Linse bzw. weiter von ihr entfernt liegt als der für nichtrelativistische Teilchen. In beiden Fällen verläuft jedoch die Bahn des relativistischen Teilchens innerhalb der Linse näher an der Achse als die des nichtrelativistischen Teilchens. (Die Bahnkurve innerhalb der Linse läßt sich qualitativ einzeichnen, wenn man r_e, r'_e, r_a und r'_a [Bezeichnungen siehe Abb. 3] aus der Abbildungsmatrix ermittelt und berücksichtigt, daß die Linse in der einen Hälfte sammelnde, in der anderen Hälfte zerstreuende Wirkung hat.) Abb. 9 c lässt erkennen, daß die stark von 1 verschiedenen Werte von F_a'/F_a^n in der Nähe von $N=9$ keineswegs einen ungewöhnlichen Strahlenverlauf bewirken. Sie kommen nur durch den Null-durchgang von F_a^n bei $N=9$ zustande. Entsprechendes gilt für F_e'/F_e^n in der Umgebung von $N=1/9$.

Wie Abb. 9 zeigt, erfahren die relativistischen Teilchen innerhalb der Linse stärkere Ablenkungen als die nichtrelativistischen. Das kann man sich folgendermaßen leicht plausibel machen: Bekanntlich hängt die Bahn eines klassischen Teilchens — für das also der klassische Energiesatz $m v^2/2 = eV$ gilt — in einem elektrostatischen Feld nicht von seiner Masse ab. Die mit dem Beschleunigungsprozeß verknüpfte Massenänderung würde deshalb keine Abweichung von der klassischen Bahnkurve bewirken, wenn die Geschwindigkeit überall gerade so groß wäre, daß

$$m v^2/2 = eV \quad (24)$$

erfüllt wäre (m = relativistische Masse).

$$\text{Wegen } m = (eV + m_0 c^2)/c^2 = (k+1) m_0 \quad (25)$$

$$\text{folgt aus (24): } v = c \sqrt{2k/(k+1)}, \quad (26)$$

wobei $k = eV/m_0 c^2$ die im Feld aufgenommene Energie der Teilchen in Einheiten der Ruhmasse ist. Gl. (26) gibt also den (hypothetischen!) Wert der Geschwindigkeit an, der trotz relativistischer Massenänderung eine klassische Bahn entstehen ließe.

Die wirkliche relativistische Geschwindigkeit berechnet sich jedoch aus

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v_{\text{rel}}^2/c^2)}} = eV + m_0 c^2 = (k+1) m_0 c^2 \quad (27)$$

$$\text{zu } v_{\text{rel}} = (c/(k+1)) \sqrt{k(k+2)}. \quad (28)$$

Die wirkliche Geschwindigkeit v_{rel} verhält sich also zu der Geschwindigkeit v , die trotz relativistischer Massenveränderung zu einer klassischen Bahn führen würde, wie

$$v_{\text{rel}}/v = \sqrt{(k+2)/2(k+1)}. \quad (29)$$

Es ist also $v_{\text{rel}} \leq v$, wobei das Gleichheitszeichen nur im nichtrelativistischen Grenzfall gilt. Ein relativistisches Teilchen der Masse m durchfliegt das Linsenfeld also zu langsam, als daß es eine klassische Bahn beschreiben könnte. Seine Bahnkrümmung ist deshalb sowohl im sammelnden als auch im zerstreuenden Teil der Linse im allgemeinen größer als die eines nichtrelativistischen Teilchens, und zwar nimmt der Unterschied nach Gl. (29) zu, wenn das Teilchen relativistischer wird. Diese Zunahme erfolgt jedoch sehr langsam.

Die Ergebnisse der allgemeinen Rechnung lassen sich also qualitativ unmittelbar einsehen.

5. Anwendung auf mehrstufige Beschleuniger

Mit Hilfe der bisher dargestellten Ergebnisse lassen sich die Abbildungseigenschaften eines Systems von vielen hintereinandergeschalteten Linsen für relativistische Teilchen leicht berechnen: Die Abbildungsmatrix des Gesamtsystems ist das Produkt der einzelnen Abbildungsmatrizen. Wenn es sich um sehr viele Beschleunigungsstufen handelt, kann jedoch die Multiplikation der Matrizen recht umständlich werden.

In diesem Fall wird die Berechnung der Abbildungseigenschaften wesentlich vereinfacht, wenn man die Ergebnisse von SONODA u. a. heranzieht⁶. Die Autoren ermittelten auf der Grundlage der Matrendarstellung Rekursionsformeln, die es gestatten, die Linsendaten des aus den ersten i Stufen zusammengesetzten Systems sofort hinzuschreiben, wenn die Daten des aus den ersten $(i-1)$ Stufen bestehenden Systems bekannt sind. Mit diesen Rekursionsformeln und den Gln. (20) lassen sich die elektronen-

⁶ M. SONODA, A. KATASE, M. SEKI u. Y. WAKUTA, J. Phys. Soc., Jap. 15, 1680 [1960].

optischen Eigenschaften eines vielstufigen elektrostatischen Beschleunigers für relativistische Teilchen leicht überblicken. Sollte die den Gln. (20) zugrunde liegende 1. Näherung nicht ausreichen, läßt sich mit den allgemeinen Ergebnissen des Abschnitts 2 jede beliebige Genauigkeit erreichen, wenn man das Ach-

senpotential des Beschleunigers durch einen hinreichend verfeinerten Polygonzug annähert.

Herrn Prof. Dr. W. BUCKEL danke ich für sein der Arbeit entgegengebrachtes Interesse und für Diskussionen. Fräulein A. GOEBEL danke ich für ihre sehr zuverlässige numerische Auswertung der Ergebnisse.

Die Sättigungsmagnetisierung dünner Schichten

Von W. DÖRING *

Aus dem IBM-Forschungslaboratorium, Adliswil, Zürich
(Z. Naturforsch. **16 a**, 1146–1152 [1961]; eingegangen am 31. Juli 1961)

Nach dem HEISENBERGSchen Modell ergibt sich für eine (100)-Schicht eines einfach-kubischen Gitters in dem Temperaturbereich $T < 0,5 T_c$, in welchem man mit ungestörter Superposition von Spinwellen rechnen darf, nur eine verhältnismäßig geringe Abnahme der Sättigungsmagnetisierung mit abnehmender Schichtdicke, nämlich bei $T = 0,5 T_c$ nur ein Absinken um 15% bei Verminderung der Schichtdicke auf 10 Atomlagen und bei tieferen Temperaturen noch weniger.

Eine Berechnung der Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung dünner Schichten von der Schichtdicke wurde von KLEIN und SMITH¹ für ein einfach-kubisches Gitter mit einer (001)-Ebene parallel zur Schicht durchgeführt. GLASS und KLEIN² erweiterten die Rechnung auf andere Gittertypen und andere Lagen der Schicht im Gitter. In dieser Theorie wird, ebenso wie in der BLOCHSchen Theorie, welche zum $T^{3/2}$ -Gesetz führt, das HEISENBERGSche Modell lokalisierter S-Elektronen verwendet.

Die Energie der tiefsten Zustände wird als Summe der Energien $\varepsilon(\mathbf{f})$ unabhängiger Spinwellen geschrieben. $\varepsilon(\mathbf{f})$ wird nach den Komponenten k_x und k_y des Ausbreitungsvektors \mathbf{f} parallel zur Schichtebene entwickelt, und davon wird nur der erste Summand proportional $k_x^2 + k_y^2$ berücksichtigt. Das ist sicher nur bei Temperaturen weit unterhalb des CURIE-Punktes zulässig. Dadurch wird der Vergleich der Ergebnisse mit dem Experiment sehr erschwert, denn Messungen wurden bisher nur bei Zimmertemperatur durchgeführt, und diese liegt bei den untersuchten Substanzen außerhalb des Gültigkeitsbereiches des $T^{3/2}$ -Gesetzes.

Um einen solchen Vergleich trotzdem zu ermöglichen, haben DRIGO³ einerseits und CRITTENDEN und HOFFMANN⁴ andererseits Verfahren zur Extrapolation der theoretischen Ergebnisse unter Benutzung

der gemessenen Werte für die Sättigungsmagnetisierung am kompakten Material angegeben. Stichhaltige Begründungen für die Richtigkeit dieser Verfahren gibt es bisher nicht. Es besteht im Gegenteil Grund zur Annahme, daß dadurch eine zu starke Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung von der Schichtdicke vorgetäuscht wird. Denn aus einer Rechnung von VALENTA⁵, in welcher die Austauschwechselwirkung durch ein vom Abstand von der Oberfläche abhängiges WEISSsches Feld ersetzt wird, ergibt sich ein merkliches Absinken der Sättigungsmagnetisierung unter den Wert des kompakten Materials erst bei viel geringeren Schichtdicken als nach der von CRITTENDEN und HOFFMANN modifizierten Theorie von KLEIN und SMITH. Da die WEISSsche Theorie für eine Wechselwirkung mit sehr vielen Nachbaratomen richtige Ergebnisse liefert, ist es unwahrscheinlich, daß sie für eine dünne Schicht zu qualitativ anderen Ergebnissen führt als die Spinwellentheorie.

Deshalb wurde hier versucht, die Theorie von KLEIN und SMITH auf höhere Temperaturbereiche zu erweitern. Das ist ohne Schwierigkeit möglich, weil nach DYSON⁶ die Wechselwirkung zwischen den Spinwellen erst bei ziemlich hohen Temperaturen eine Rolle spielt. Wenn man die Sättigungsmagnetisierung nach Potenzen von T entwickelt, hängen die

¹ M. J. KLEIN u. R. S. SMITH, Phys. Rev. **81**, 378 [1951].

² S. J. GLASS u. M. J. KLEIN, Phys. Rev. **109**, 288 [1958].

³ A. DRIGO, Nuovo Cim. **8**, 498 [1951].

⁴ E. C. CRITTENDEN u. R. W. HOFFMANN, Rev. Mod. Phys. **25**, 310 [1953].

⁵ L. VALENTA, Czech. J. Phys. **7**, 127 [1957].

⁶ F. J. DYSON, Phys. Rev. **102**, 1217 [1956].